解二次方程的「規矩」[1]

梁景信
香港教育學院 數學與資訊科技學系
ksleung@ied.edu.hk

引言

解實系數二次方程，一般用三類方法：（1）代數法（因式分解、配方、用求根公式），（2）圖解法（畫出二次函數的圖象），（3）數值法（二分法、Newton 法）。其實還有一個較少人知的幾何作圖法(參看[1])。此法結合數學的兩大範疇：代數與幾何，且不難學，因而十分適合高中學生學習。本文除介紹這個方法外，還用幾何法導出以下三個有關二次方程的重要結果：根和系數的關係、判別式和實根數目的關係、求根公式。

方法和原理

考慮實系數二次方程$(E): x^2+bx+c=0$，其中$bc\neq 0$。在方格紙上標出$A(0,-1)$和$B(-b,-c)$兩點，以圓規和直尺作圖，可得AB的中點O，再以O爲圓心，OA爲半徑作一圓(C)。若(C)與x軸相交於兩點$M(\alpha,0)$和$N(\beta,0)$，則方程(E)有兩相異實根α 和β（圖 1）（不妨假設$\alpha>\beta$）；若只與x軸相切於一點$P(\gamma,0)$，則(E)有一重實根γ（圖 2）；若與x軸不相交，則(E)沒有實根（圖 3）。圖 1－3 都是表示$c>0$的情況，讀者可自行繪畫當 $c<0$的圖象。

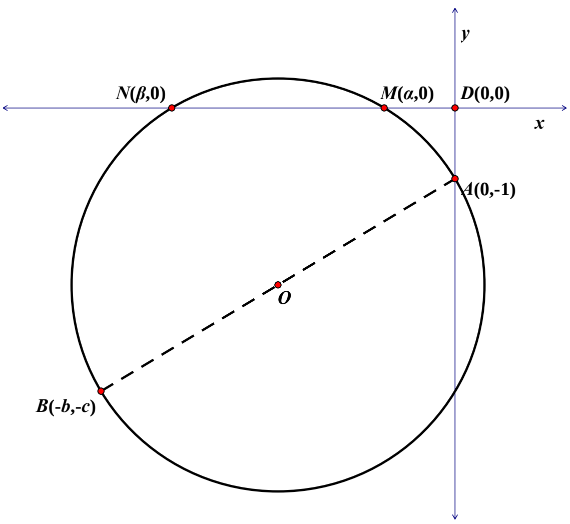

圖 1

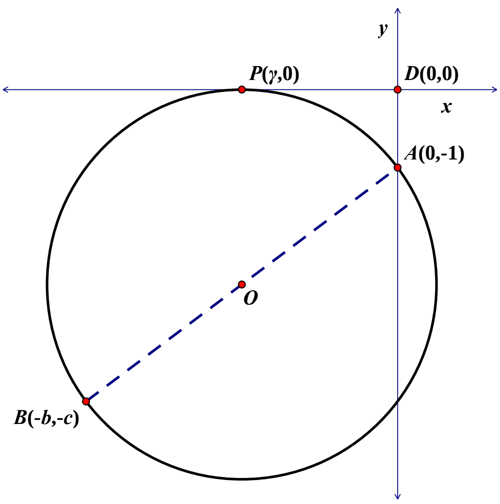

圖 2

---

[1]《孟子・離婁上》：「不以規矩，不能成方圓。」規是圓規，用來畫圓；矩是曲尺，用來畫直角。所以規矩本是幾何作圖工具的意思，後來引伸指法則。本文標題「規矩」一詞，也兼具這兩個意思。

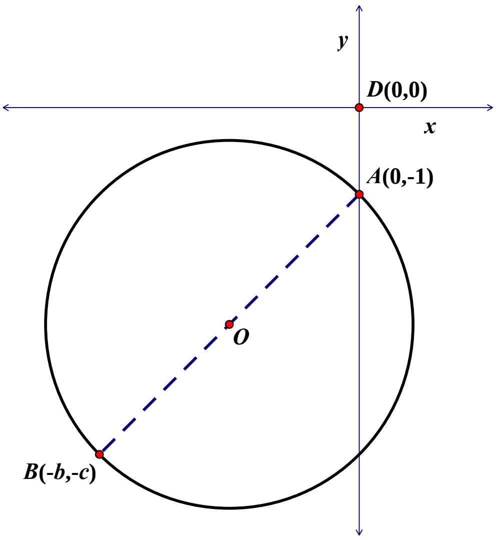

圖 3

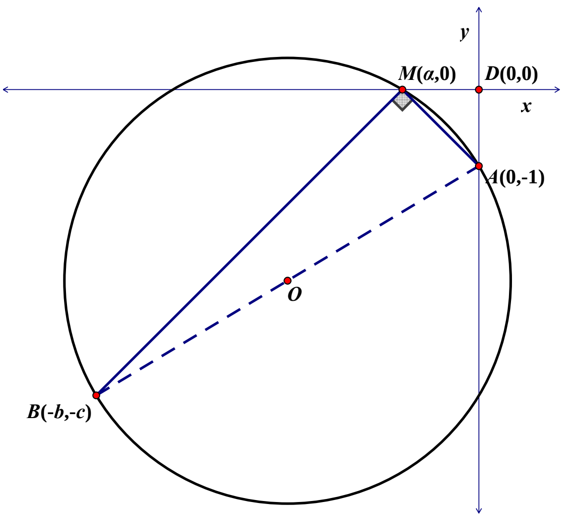

圖 4

此法原理如下：設 $M(\alpha,0)$ 爲 x 軸上的一點，且 $\alpha \neq 0$， $\alpha \neq -b$（圖 4）。

M 是 (C) 上的一點 $\Leftrightarrow AM \perp BM \Leftrightarrow \dfrac{0-(-1)}{\alpha-0}\cdot\dfrac{0-(-c)}{\alpha-(-b)} = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 + b\alpha + c = 0$。

由於半圓上的圓周角是直角，我們可以更簡便地以三角尺或 T 尺來求實系數二次方程的實根，方法是要令三角尺的直角的兩條夾邊分別通過 $A(0,-1)$ 和 $B(-b,-c)$ 兩點，同時使直角落在 x 軸上（圖 5）。

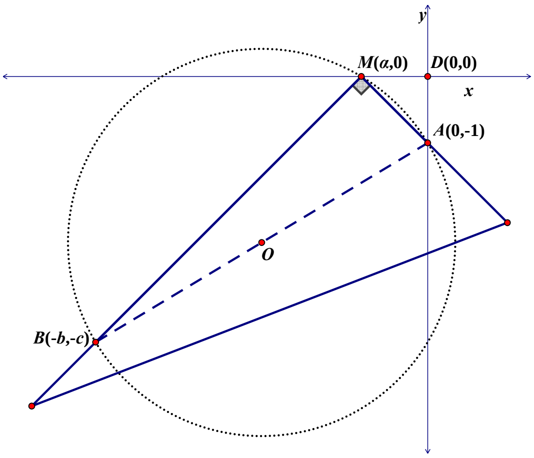

圖 5

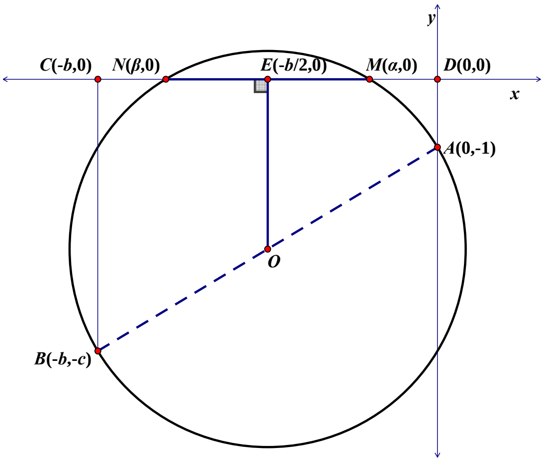

圖 6

根和系數的關係

從圓心O連一直線與x軸垂直，且與x軸相交於點E，因此$NE=EM$（圖 6）[2]。由截距定理可知E的座標是　　　　，從而得　　　　，即$\alpha+\beta=-b$。

由此可得$CN=MD$，兼且$\angle NCB=\angle ADN=\angle BNA=\pi/2$，易得$\angle ADN \sim \angle NCB$（圖 7），因此$AD/DN=NC/CB \Rightarrow 1/\beta=\alpha/c \Rightarrow \alpha\beta=c$。

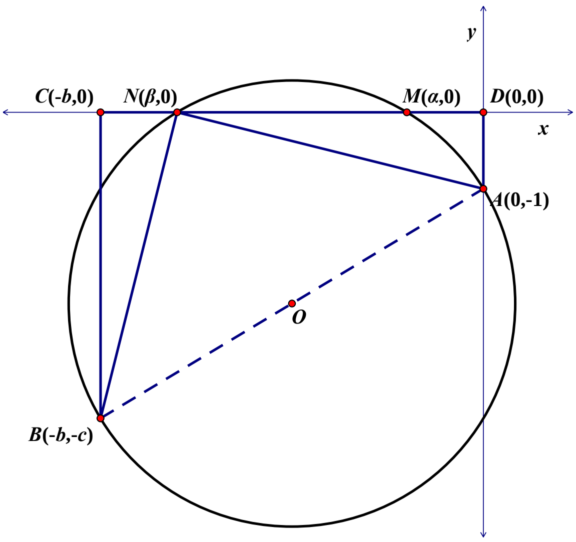

圖 7

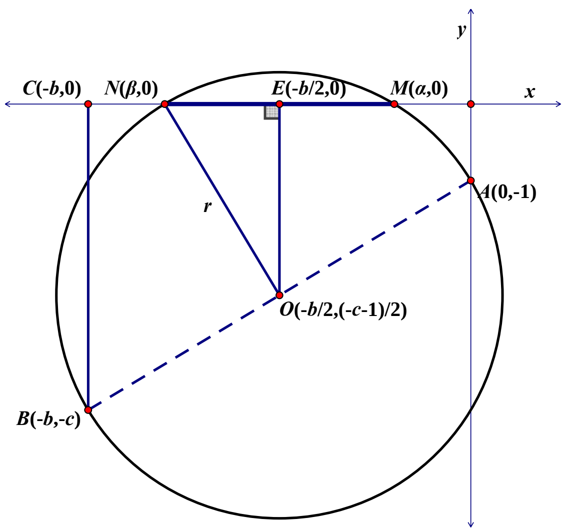

圖 8

判別式和實根數目的關係

設(C)的半徑為r，因為$r=AB/2$，所以$r=\sqrt{(c-1)^2+b^2}/2$。若$r>OE=(c+1)/2$（圖 8），則方程(E)有兩相異實根；若$r=OE$，則(E)有一重實根（圖 2）；若$r<OE$，則(E)沒有實根（圖 3）。

[2] 為了減省符號，線段（如 EM）和它的長度都用相同符號（即 EM）表示。

因爲

且$r + OE > 0$ ，所以：

若 ，則方程(E)有兩相異實根； 若 ， 則(E)有一重實根；若

，則(E)沒有實根。

求根公式

考慮直角三角形OEN （圖 8）和利用前面的計算得 ，並由於$NB = EM$ ，所以

， 。

討論

其實摺紙也可算是一種幾何作圖工具，用摺紙解二次方程的方法，可參看[2]。
爲方便論述，我們沒有考慮$bc = 0$ 的情況，讀者可自行作圖來探究有關的情況。
至於求複根的幾何方法，因爲較爲複雜和礙於篇幅關係，故不在此介紹，留待日後另文論述。

參考文獻

[1] Dickson, L. E. (1922). *First course in the theory of equations*, p.30. New York:John-Wiley & Sons

[2] 梁景信（2009），摺紙解方程，《Datum 數學教育期刊》，第 44 期，頁 29-31。

輯於 (2011)《數學教育期刊》45，頁 95-99。